数理解析研究所講究録
1003巻 1997年 66-80

$\mathcal{O}_\beta$ の端数 β と $L(F_r)$ の端数 r

九大数理　綿谷安男
(WATATANI, YASUO)

九大数理　植田好道
(UEDA YOSHIMICHI)

0 はじめに

このノートでは片山－松本－綿谷[5]によって導入された Interpolated Cuntz algebra $\mathcal{O}_\beta$ $(\beta \in \mathbb{R}, \beta > 1)$ の端数 β と Dykema [3] と Rădulescu [7] によって導入

されたInterpolated free group factor $L(F_r)$ $(r \in \mathbb{R}, r > 1)$ の端数 r の間に何か密接な関係がないかを考えたい。

もちろん $\beta = n$ が正の整数$(\geqq 2)$の時は $r = n$ と同じ値で次のように関係することはVoiculescuによってsemi-circular lawを通じてよくわかっている([8]を参照)。

Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ の生成元を $S_1, \cdots, S_n$ とする。$\mathcal{O}_n$ に対応するToeplitz algebra $\mathcal{T}_n$ の生成元を $T_1, \cdots, T_n$ とする。そして T_k は Fock space $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ と creation operator

として作用している。つまり

$H=\mathbb{C}^n$ の basis として $\{e_1, \cdots, e_n\}$

$$F(H) = \mathbb{C}\Omega \oplus \sum_{m=1}^{\infty}{}^{\oplus} \underbrace{H\otimes\cdots\otimes H}_{m\text{コ}}$$

$$\begin{cases} T_k(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m}) = e_k\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m} \\ T_k\Omega = e_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_k^*(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_m}) = \delta_{k,i_1}\, e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_m} \\ T_k^*\Omega = 0 \end{cases}$$

この時 $\{\mathrm{Re}\,T_k = \frac{T_k+T_k^*}{2} \mid k=1,\cdots,n\}$ の生成する

von Neuman algebra $\{\mathrm{Re}\,T_k \mid k=1,\cdots,n\}''$ を

$F(H)$ 上で考えると、

$$\{\mathrm{Re}\,T_k \mid k=1,\cdots,n\}'' \cong L(F_n)$$

と n コの生成元をもつ自由群 F_n から

生成される free group factor $L(F_n)$と同型になる。

そこで問題になるのは βが整数でない端数の時はどうなっているかである。それを完全に解明することはできていないが、特別な場合には関係がつく。例えば $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$（黄金比）の時には $r = \frac{3}{2}$ が対応し、$\theta_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ と $L(F_{\frac{3}{2}})$が関係する。

$\boxed{1}$ Interpolated free group factor

Dykema [3] と Rădulescu [7] は実数 $r > 1$ に対して II_1-factors の族 $L(F_r)$

で以下のような関係をみたす Inter-polated free group factors $L(F_r)$ を構成した（$r \in \mathbb{N}$ なら通常のものになる）。

- $L(F_r) * L(F_s) \cong L(F_{r+s})$

$$(1 \leq r, s < \infty)$$

- II_1-factor $M = L(F_s)$ の projection $p \in M$ で $\mathrm{Tr}(p) = r$ となるもので M をわると

$$pL(F_s)p \cong L(F_t)$$

$$t = 1 + \frac{s-1}{r^2} \qquad 1 < s < \infty$$

もっと一般に $p \in L(F_s) \otimes M_n$ の projection で $\mathrm{Tr}(p) = r \in \mathbb{R}$ に対しても同じ式が成立

$\boxed{2}$ Interpolated Cuntz algebra $\mathcal{O}_\beta$

Cuntz algebra $\mathcal{O}_n$ [1] や Cuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$ [2] を拡張して松本[6]は一般の subshift Λ に対して C^*-algebra $\mathcal{O}_\Lambda$ を導入した。

$\Sigma = \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ を symbol の集合

$\sigma : \Sigma^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}}$ を shift、つまり、

$$(\sigma x)_n = x_{n+1} \quad \text{for } x = (x_n)_n \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$$

$\Lambda \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$: closed subset で $\sigma(\Lambda) = \Lambda$

この時 $(\Lambda, \sigma|_\Lambda)$ を subshift という。

$\sigma = \sigma|_\Lambda$ とかく。以下 $\mathbb{Z}$ の代わりに $\mathbb{N}$ にした片側 shift も同時に考える。

$\Lambda^k = \{ \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k) \in \Sigma^k \mid \exists x \in \Lambda \ \mu_1 = x_1, \cdots, \mu_k = x_k \}$

を許される長さ $|\mu| = k$ の word の全体とする

$\Lambda_* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda^k$: 有限 word 全体

$H = \mathbb{C}^m$ の basis として $\{e_0, e_1, \cdots, e_{m-1}\}$ をとる.

$F_\Lambda^0 = \mathbb{C}\Omega$ (Ω は Vacuum vector)

$F_\Lambda^k = [\, e_\mu \in H^{\otimes k} \mid \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k) \in \Lambda^k \,] \subset H^{\otimes k}$

ここで $e_\mu = e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k}$ の略記

$F_\Lambda = \bigoplus_{k=0} F_\Lambda^k$

$k = 0, 1, \cdots, m-1$ に T_k という Toeplitz operator

$\in B(F_\Lambda)$ を「e_k の creation」で定義する:

- $T_k e_\nu = \begin{cases} e_k \otimes e_\nu & (もし\ k\nu \in \Lambda_*) \\ 0 & (もし\ k\nu \notin \Lambda_*) \end{cases}$

- $T_k \Omega = e_k$

この時

- $T_k^* e_\nu = \begin{cases} e_{\nu_2 \cdots \nu_n} & (もし\ k = \nu_1) \\ 0 & (もし\ k \neq \nu_1) \end{cases}$

- $T_k^* \Omega = 0$

$\pi : B(F_\Lambda) \longrightarrow B(F_\Lambda)/K(F_\Lambda)$ を quotient map

$S_k \underset{おく}{=} \pi(T_k)$

$\boxed{\text{Def}}$ 上の状況で subshift Λ に付随して

Toeplitz algebra $\mathcal{T}_\Lambda$ と松本の algebra $\mathcal{O}_\Lambda$

をそれぞれ T_k 達と S_k 達の生成する C^*-alg.

とする: $S_\mu = S_{\mu_1} \cdots S_{\mu_n}$ と略記する

$$\mathcal{T}_\Lambda = C^*\{T_k \mid k = 0, 1, \cdots, m-1\} \subset B(F_\Lambda)$$

$$\mathcal{O}_\Lambda = C^*\{S_k \mid k = 0, 1, \cdots, m-1\} \subset B(F_\Lambda)/K(F_\Lambda)$$

この時 交換関係は $a_\mu = S_\mu^* S_\mu$: projection として

$\sum_{k=0}^{m-1} S_k S_k^* = 1$ と $a_\mu S_\nu = S_\nu a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu \in \Lambda^*)$

Ω_β を定義するために β に対して β-shift とよばれる特別な shift を考える。

$\boxed{\text{Def}}$ (β-展開)

$\beta \in \mathbb{R}$ で $\beta > 1$ なるものを1つ固定する。

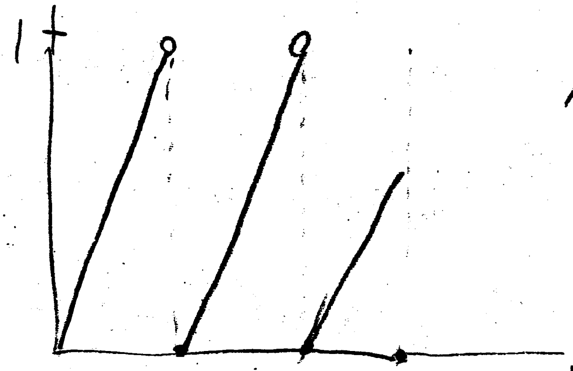
$\exists\, m \in \mathbb{N}$ $\quad m-1 < \beta \leqq m$ ので

$\Sigma = \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ とおく

$f_\beta : [0,1) \longrightarrow [0,1)$: 区間力学系を

$$f_\beta(x) = \beta x - [\beta x] \quad (x \in [0,1))$$

$$= 「\beta x \text{ の小数部分}」$$



0 1 2 と記号をわりあてる

この f_β を記号力学系で「表現」しよう

$x \in [0,1)$ の β-展開 $(d_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ を

次できめる：

$$\begin{cases} d_1(x) = [\beta x] \\ d_n(x) = [\beta f_\beta^{n-1}(x)] \end{cases}$$

この時 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x)}{\beta^n}$ と展開できる

さて $\Sigma^{\mathbb{N}}$ に積位相を入れ，さらに辞書式順序 $\preceq$ を入れておく。すると区間 $[0,1)$ の順序とうまく両立する。

$$\zeta_\beta \equiv \lim_{x\to 1}((d_n(x))_n) = \sup_{x\in[0,1)} (d_n(x))_n \in \Sigma^{\mathbb{N}}$$

とし $\zeta_\beta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots\cdots)$ とおく

例) $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の時 $1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}$ より

$(d_n(1))_n = (1, 1, 0, 0, 0, \cdots\cdots)$

$\zeta_\beta = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots\cdots)$

$\boxed{\text{Def}}$ (β-shift)

$$\Lambda_\beta = \left\{ x (= (x_n)_n \in \Sigma^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{matrix} \forall n = 0, 1, 2, \cdots \\ \sigma^n(x) \leq \xi_\beta \end{matrix} \right\}$$

$\sigma(x)_n = x_{n+1}$

(Λ_β, σ) を $\underline{\beta\text{-shift}}$ という。

$\boxed{\text{Def}}$ (Interpolated Cuntz algebras $\mathcal{O}_\beta$)

$\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 1$ に対して、β-shift

(Λ_β, σ) に付随する C^*-algebra $\mathcal{O}_{\Lambda_\beta}$ を

$\mathcal{O}_\beta$ とかき、Interpolated Cuntz algebras という。

例) $\beta = n \in \mathbb{N}$ なら 元の Cuntz alg $\mathcal{O}_n$ に同型。

$\boxed{\text{定理 1}}$ (片山-松本-綿谷 [5])

$\mathcal{O}_\beta$ は simple で purely infinite になる。

$\boxed{3}$ Θ_β と $L(F_r)$ の関係

一般の $\beta>1$ についてはまだ不明だが、ある特別なクラスのβについては関係があることがわかった。

定理2 (植田-綿谷[準備中])

$\beta>1$ が $\beta^{k}=n\beta^{k-1}+n\beta^{k-2}+\cdots+n\beta+n$ の解になっているとする。対応する Θ_β と Toeplitz alg. $\mathcal{J}_\beta = C^*\{T_{z^i} \mid i=0,1,\cdots,n\}$ を考える。

$\Rightarrow$ $\exists r>1$

$$\{\mathrm{Re}\, T_i \mid i=0,1,\cdots,n\}'' \cong L(F_r)$$

ここで実は

$$r = n + \sum_{\substack{1\le i,j\le k \\ i\ne j}} \frac{\left(\sin\frac{i\pi}{k+1}\right)^2 \left(\sin\frac{j\pi}{k+1}\right)^2}{\sqrt{\sum_{m=1}^{k}\left(\sin\frac{im\pi}{k+1}\right)^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{k}\left(\sin\frac{jm\pi}{k+1}\right)^2}}$$

Proof. (命題1) free product の定義より

$\{\mathrm{Re}\,T_i \mid i=0,1,\cdots,n\}'' \cong L(F_n) * \mathbb{C}^{k+1}$

になっていることがわかる。ただし

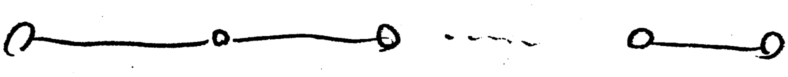
Ω の vector state は $\mathbb{C}^{k+1}$ 上で trace

で、その minimal projection での重みを

ディンキン図形 A_{k+1} に対応する Perron

Frobenius eigen-value と eigen-vector を

使って求める。

A_{k+1} 

後は Dykema の定理[4]を適用するのみ。■

例 $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (黄金比) $\ni r = \frac{3}{2}$

References

[1] J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys. 57 (1977), 173–185

[2] J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^*-algebras and topological Markov chains, Inventions Math. 56 (1980), 251–268.

[3] K. J. Dykema, Interpolated free group factors, Pacific J. Math. 163 (1994), 123–135.

[4] K. J. Dykema, Free products of hyperfinite von Neumann algebras and free dimension, Duke Math. J. 69 (1993), 97–119

[5], Y. Katayama, K. Matsumoto and Y. Watatani, Simple C^*-algebras arising from β-expansion of

real numbers, to appear in Ergod. Th. & Dynamical Sys.

[6] K. Matsumoto, On C*-algebras associated with subshifts, to appear in Internat. J. Math.

[7] F. Rădulescu, Ramom matrices, amalgamated free products, and subfactors in free group factors of noninteger index, Inv. Math 115 (1994), 347–389.

[8]. D. Voiculescu, Symmetries of some reduced free product C*-algebras, Operator Algebras and Their Connections with Topology and Ergodic Theory, Lecture Note in Mathematics, Vol 1132, Springer-Verlag, 1985) 556–588.